19/12/2017

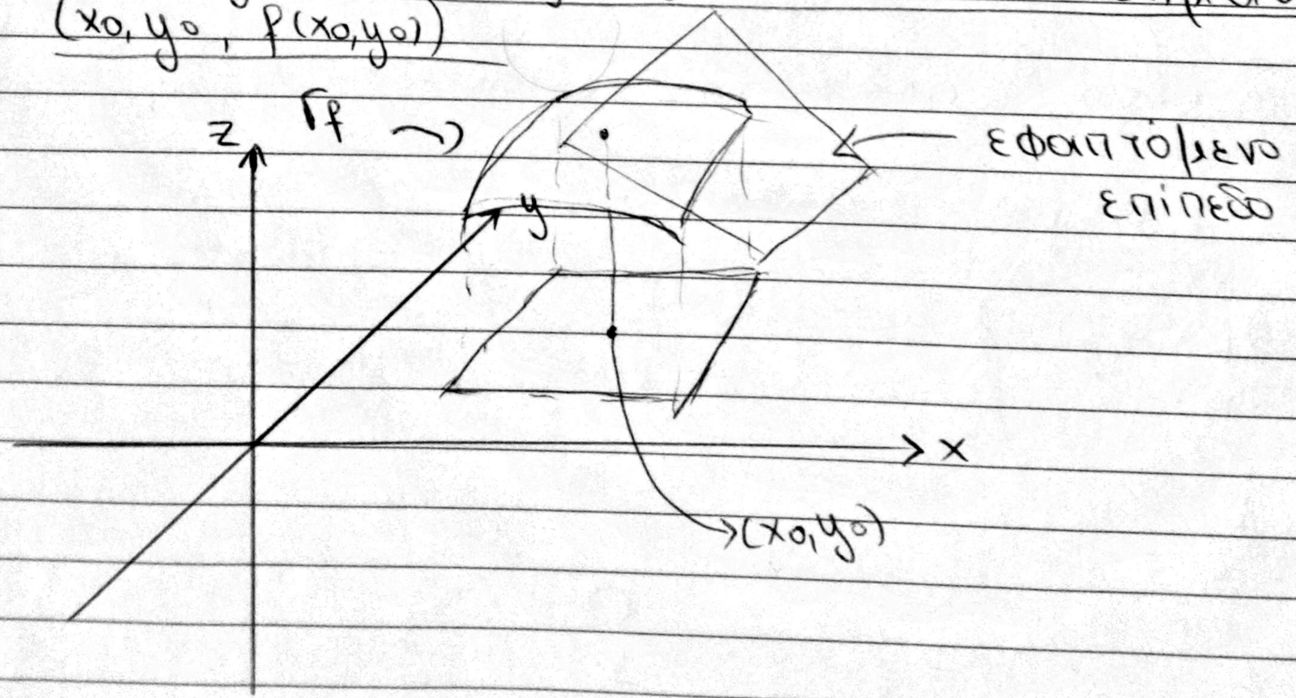
Ορισμός Έστω $f: U \to \mathbb{R}$ $U \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό

f διαφορίσιμη (∇). Τότε το επίπεδο (στον $\mathbb{R}^3$)

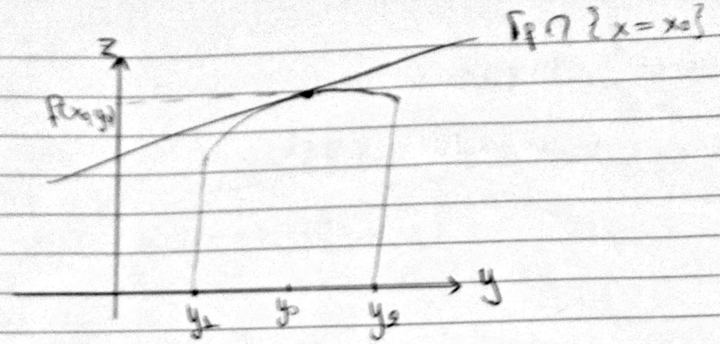
$$z = f(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), \quad x,y \in \mathbb{R}$$

ονομάζεται εφαπτόμενο επίπεδο της f στο $(x_0,y_0) \in U$

ή εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας $\Gamma_f = \{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in U\} \subset \mathbb{R}^3$ στο σημείο της $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$



$\boxed{x = x_0}$



Εφαπτόμενο επίπεδο : $z = f(x_0,y_0) + (x-x_0, y-y_0)\cdot \nabla f(x_0,y_0)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix}}_{=\bar{a}_0} + \underbrace{(x-x_0)}_{=\lambda} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \end{pmatrix}}_{=\bar{a}_1} + \underbrace{(y-y_0)}_{=\mu} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}}_{=\bar{a}_2}$$

$x, y \in \mathbb{R}$

$\to$ $\underbrace{\bar{a}_0 + \lambda \bar{a}_1 + \mu \bar{a}_2}_{\text{το σύνολο αυτό}}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\quad \bar{a}_1, \bar{a}_2$ γραμμικά ανεξάρτητα

είναι διαν. υποχ. του $\mathbb{R}^3$ διάστασης 2
ομοπαράλληλο (ή αφινικό) υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$.

Επίσης, δίνεται από την εξίσωση

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ 1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-f(x_0,y_0) \end{pmatrix} = 0$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Το κάθετο διάνυσμα στο εφαπτόμενο επίπεδο

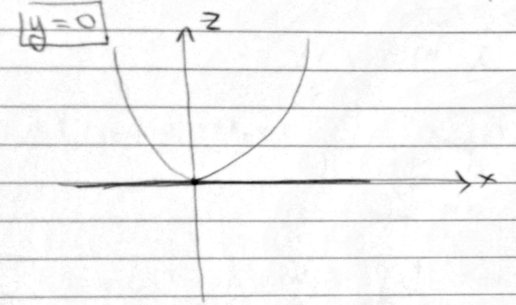
Παράδειγμα $f(x,y) = x^2+y^2$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x,y) = (2x,\ 2y) \Rightarrow \nabla f(0,0) = (0,0) \Rightarrow$$

το εφαπτόμενο επίπεδο στο $(0,0,0)\in\Gamma_f$

$$z = \underbrace{f(0,0)}_{=0} + \overbrace{(x,y)\cdot\underbrace{\nabla f(0,0)}_{=(0,0)}}^{=0} = 0$$

$\boxed{y=0}$



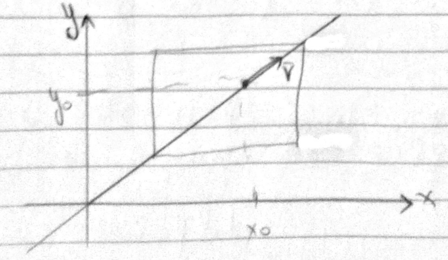
Παρατήρηση Η κατά κατεύθυνση

$\bar{v} = (v_1, v_2)\in\mathbb{R}^2$ με $\|\bar{v}\| = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+hv_1,\ y+hv_2) - f(x_0,y_0)}{h}\in\mathbb{R}$$

(μιας $f: U\to\mathbb{R}$, $U\in\mathbb{R}^2$ ανοικτό, f διαφορίσιμη)

δίνει την κλίση της εφαπτομένης στο σημείο $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))\in\Gamma_f$ της καμπύλης που προκύπτει από την τομή του Γ_f με το επίπεδο κάθετο στο Oxy που περιέχει την ευθεία $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} + h\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$, $h\in\mathbb{R}$.



Η καμπύλη αυτή είναι η $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0+hv_1 \\ y_0+hv_2 \\ \underbrace{f(x_0+hv_1,\, y_0+hv_2)}_{\in \Gamma_f}\end{pmatrix} =$

$\bar{\gamma}(h)$, $h\in\mathbb{R}$ με $\bar{\gamma}(0) = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\\f(x_0,y_0)\end{pmatrix}$ και έχει

εφαπτόμενο διάνυσμα $\bar{\gamma}'(h) = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\ \nabla f(x_0+hv_1,\, y_0+hv_2)\,(v_1,v_2)\end{pmatrix}$

$\bar{\varphi}(h) = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} + h\underbrace{\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}}_{=v}$

$$\frac{d}{dh}(f\circ\bar{\varphi})(h) = \underbrace{Df(\varphi(h))}_{\nabla f(x_0+hv_1,\, y_0+hv_2)}\cdot \underbrace{D\bar{\varphi}(h)}_{=\bar{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}} = \nabla f(x_0+hv_1,\, y_0+hv_2)\cdot \bar{v} =$$

Η εφαπτόμενη ευθεία που παράγει αυτό το διάνυσμα είναι η $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\\f(x_0,y_0)\end{pmatrix} + h\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\ \nabla f(x_0+hv_1,\, y_0+hv_2)\,(v_1,v_2)\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}x_0\\y_0\\f(x_0,y_0)\end{pmatrix} + hv_1\begin{pmatrix}1\\0\\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\end{pmatrix} + hv_2\begin{pmatrix}0\\1\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\end{pmatrix}$$

$\bar{\gamma}(h) \in$ εφαπτόμενο επίπεδο της f στο (x_0,y_0).

Παρατήρηση

Η κλίση μιας διαφορίσιμης $f: U\to\mathbb{R}$, $U\subset\mathbb{R}^n$ ανοικτό, $\nabla f(\bar{x})$ είναι κάθετη στο σύνολο στάθμης $f(\bar{x})$ της f $\in\mathbb{R}^n$

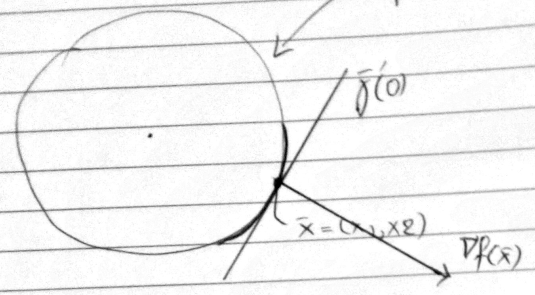
$= L_f(f(\bar{x}))$.

$\{\bar{y} \in U : f(\bar{y}) = f(\bar{x})\}$

<u>δηλ.</u> $\forall$ C^1 καμπύλη $\bar{\gamma} : I \to L_f(f(\bar{x}))$ με

$\bar{\gamma}(0) = \bar{x}$ ισχύει $\nabla f(\bar{x}) \perp \bar{\gamma}'(0)$ δηλ. $\nabla f(\bar{x}) \cdot \bar{\gamma}'(0) = 0$

$L_f(f(\bar{x}))$



Αφού $\bar{\gamma}(t) \in L_f(\underbrace{f(\bar{x})}_{=c}) \Longrightarrow \underbrace{f(\bar{\gamma}(t))}_{=(f\circ\bar{\gamma})(t)} = c \quad \forall t$

<u>και</u> $(f\circ\bar{\gamma})'(t) = D(f\circ\bar{\gamma})(t) = Df(\bar{\gamma}(t)) \cdot D\bar{\gamma}(t) = \nabla f(\bar{\gamma}(t)) \cdot \bar{\gamma}'(t)$

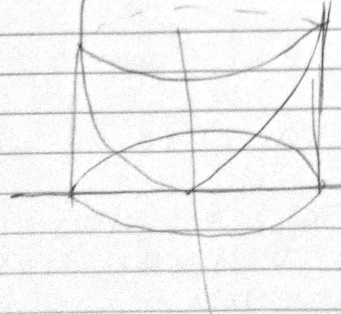
$\Longrightarrow \underbrace{(f\circ\bar{\gamma})'(t)}\, = 0 \quad \forall t$

$\xRightarrow{t=0} \nabla f(\underbrace{\bar{\gamma}(0)}_{=\bar{x}}) \cdot \bar{\gamma}'(0) = 0$

<u>Παράδειγμα</u> (το πιο απλό) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$L_f(c) = \{(x,y) \in \underbrace{\mathbb{R}^2}_{=U} : \underbrace{f(x,y)}_{=x^2+y^2} = c\}$ για $\underline{c \geq 0}$

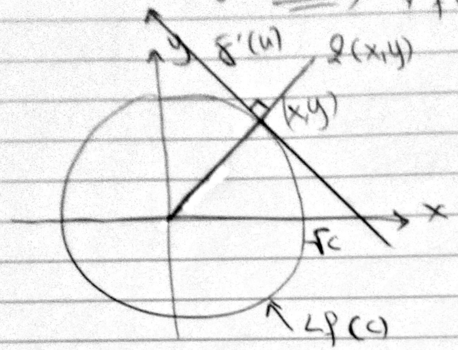
δηλ. είναι το $L_f(c)$ ο κύκλος με ακτίνα $\sqrt{c}$ (για $c>0$)



$\Longrightarrow \bar{\gamma}'(h) = \sqrt{c}(-\sin h, \cos h)$ $h \in [0, 2\pi]$

$L_f(c) \subset \mathbb{R}^2$ $\quad \bar{\gamma}'(h) = (-y, x) = \sqrt{c}(-\sin h, \cos h$

$$f(x,y) = x^2+y^2 \Longrightarrow \nabla f(x,y) = 2(x,y)$$
$$\Longrightarrow \nabla f(x,y)\cdot \gamma'(u) = 2(x,y)\cdot(-y,x) = 0$$



Μερικές Παράγωγοι ανώτερης τάξης

Ορισμός: Έστω ότι η $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό είναι μερικώς διαφορίσιμη (δηλ $\exists\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) \in \mathbb{R}\ \ \forall \bar{x} \in U$)

Αν οι μερικές παράγωγοι στο U
$\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}\ \ \forall i = 1, \dots, n$
είναι μερ. διαφ. δηλ. $\exists\ \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})\right) \in \mathbb{R}\ \forall i,j = 1, \dots, n$

τότε λέμε ότι η f είναι δύο φορές μερικώς διαφορίσιμη
και οι $\frac{\partial^{2} f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\bar{x})$

ονομάζονται μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης.

Ορισμός (γενικά): Μια $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτή ονομάζεται (αι) $k+1$ φορές μερικώς διαφορίσιμη, αν είναι k φορές μερικώς διαφορίσιμη (δηλ. $\exists$ όλες οι μερικές παράγωγοι και υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι μέχρι και k τάξης) $k+1$ τάξης.

$$\underbrace{\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}} \cdots \partial x_{i_1}}}_{k+1 \text{ μεταβλητή}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}} \qquad U \to \mathbb{R} \quad \forall i_1, \ldots, i_{k+1} = 1, \ldots, n$$

(B) $k+1$ φορές συνεχώς διαφορίσιμη αν είναι $k+1$ φορές μερικώς διαφορίσιμη και όλες οι μερικές παράγωγοι τάξης $\leq k+1$ είναι συνεχείς και γράφουμε $f \in C^{k+1}(U)$

Αν αυτό ισχύει $\forall k \in \mathbb{N}$ λέμε ότι η $f \in C^{\infty}(U)$

Π.Χ. : $g(x,y,z) = e^{xy} + z\cos x$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$\Longrightarrow \nabla g(x,y,z) \in \left(ye^{xy} - z\sin x,\ xe^{yx},\ \cos x \right)$

$$\Longrightarrow \underbrace{Hg}_{\substack{=D(Dg) \\ =D^2 g}}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)\right) & \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)\right) & \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\right) & \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\right) \end{pmatrix}$$

Σύντομα, ο Εσσιανός (Hesse) πίνακας της $g: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ είναι ο

$$Hg(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 g}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 g}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Το πιο σημαντικό για μερικές παραγώγους ανώτερης τάξης είναι το <u>Θεώρημα Schwarz</u>

$$\boxed{\text{Έστω } f \in C^2(U) \quad \underbrace{U \subseteq \mathbb{R}^n}_{\text{ανοικτό}} \implies Hf(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ είναι συμμετρικός}}$$

δηλ. όλες οι <u>μικτές παράγωγοι</u>

είναι ίσες $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$

Επίσης, $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}}$

Το Θεώρημα Schwarz γενικεύεται ως εξής

$f \in C^k(\underbrace{U}_{\in \mathbb{R}^n}) \implies$ <u>με όποια σειρά</u> και να παραγωγίσω μερικώς έχω ίσες παραγώγους.

π.χ. $\frac{\partial^6 f(x,y,z)}{\partial x^2 \partial z \partial y^3}$

$\| \quad f \in C^6(U)$

$$\frac{\partial^6 f(x,y,z)}{\partial x^2 \partial y^3 \partial z} = \frac{\partial^6 f(x,y,z)}{\partial z \, \partial y^2 \partial x \partial y \, \partial x}$$

Θεώρημα Taylor: Έστω $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, ανοικτό

$$f \in C^k(U) \implies f(\underbrace{\bar{x}+\bar{\eta}}_{\in U}) = \underbrace{\sum_{|a| \leq k} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!} \bar{\eta}^a}_{\text{Πολυώνυμο Taylor βαθμού } k} +$$

$o(\|\bar{\eta}\|^k)$ για $\bar{\eta} \to \bar{0}$

Όπου γενικώς $\underbrace{F(x)}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{o}_{\text{"μικρό ο"}}(G(x))$ για $x \to 0$

$\Longleftrightarrow$ συμβολισμός Landau :

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{F(x)}{G(x)} = 0$, (άρα $F(x) = o(1)$ για $x \to 0$
$\Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to 0} F(x) = 0$)

όπου $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n$

$\bar{\eta}^a = (\underbrace{\eta_1, \ldots, \eta_n}_{\in \mathbb{R}^n})^a$

$\eta_1^{a_1}, \ldots, \eta_n^{a_n}$

$|a| = a_1 + \ldots + a_n$

$a! = a_1! \ldots a_n!$

$D^a f(\bar{x}) = \frac{\partial^{|a|}}{\partial x_1^{a_1} \ldots \partial x_n^{a_n}} (\bar{x})$

Ασκ. (Υπολογιστικές!) για μερικές παραγώγους ανώτερης τάξης και Taylor.